

การจำลองผลตอบสนองเชิงกลของชั้นยึดหยุ่นที่เคลือบด้วยวัสดุเชิงประกอบผสมแผ่นแกรฟีน

Modeling of mechanical response of surface-loaded elastic substrate coated by graphene platelet-reinforced composite

นพเมศร์ เกียรติพันธุ์¹ ปณต วงศ์วัฒนาเสถียร² จรุงญ รุ่งอมรรัตน์³

^{1,2,3} ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย จ.กรุงเทพฯ

บทคัดย่อ

โครงการนี้จึงมุ่งเน้นไปที่การศึกษาอิทธิพลของชั้นเคลือบวัสดุเชิงประกอบผสมแผ่นแกรฟีน ซึ่งมีส่วนช่วยป้องกันแรงกระทำจากภายนอกที่เกิดจากการกระตุ้นด้วยแรงแผ่กระจาย ชั้นเคลือบวัสดุเชิงประกอบผสมแผ่นแกรฟีนถูกนำมาประยุกต์ใช้เคลือบผิวเพื่อป้องกันการกัดกร่อน และด้วยคุณสมบัติกำลังสูงของแกรฟีนทำให้ชั้นเคลือบวัสดุเชิงประกอบผสมแผ่นแกรฟีนมีความสามารถในการป้องกันแรงกระทำจากภายนอกด้วย ผู้จัดทำได้ทำการศึกษาด้วยการสร้างแบบจำลองเป็นระนาบสองมิติที่มีชั้นเคลือบหนึ่งชั้น ความลึกจำกัด และมีฐานกึ่งปริภูมิสองมิติความลึกเป็นอนันต์ มีแรงกระทำเป็นแรงแผ่กระจาย โดยสร้างจากทฤษฎีความยืดหยุ่นเชิงเส้นระเบียบวิธีการแปลงฟูเรียร์ ระเบียบวิธีการแปลงฟูเรียร์ผกผัน และระเบียบการสควอดราเจอร์ หลังจากทำการสอบเทียบกับกรณีอ้างอิงแล้ว ได้มีการนำเสนอผลเฉลยในกรณีต่างๆ ตัวแปรต้นที่จะศึกษาคือสัดส่วนแกรฟีนที่ใช้ผสมวัสดุเคลือบเชิงประกอบผสมแผ่นแกรฟีนและความหนาชั้นเคลือบ โดยสร้างเส้นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงที่เกิดขึ้นบนผิวฐานกึ่งปริภูมิสองมิติและตัวแปรต้นทั้งสองเพื่อศึกษาแนวโน้มการลดลงของหน่วยแรงที่กระทำต่อฐานกึ่งปริภูมิสองมิติ

คำสำคัญ: แกรฟีน, วัสดุเชิงประกอบผสมแผ่นแกรฟีน, ฐานกึ่งปริภูมิสองมิติ, แบบจำลองทางคณิตศาสตร์, คุณสมบัติกำลังสูง

Abstract

This project presents the influence of composite coating layers of graphene sheets, which assist in preventing external forces induced by uniformly distributed loads. Graphene-composites coating is applied to protect against corrosion, and the high strength properties of graphene enable these layers to resist external forces. The researchers conducted a study by creating a two-dimensional model with one limited-depth coating layer and half-plane subjected to uniformly distributed loads. The

general solutions were solved by Linearly Elastic theory, Fourier Transform methods, Inverse Fourier Transform methods and Numerical Quadrature. After comparing with reference cases, solution results were presented for various cases. The parameters studied included the proportions of graphene used for Graphene-composites and the thickness of the coating layer. Graphs were generated to show the relationship between the applied uniformly distributed loads on half-plane and both parameters, to study the trends of stress reduction on half-plane.

Keywords: Graphene, Graphene-Composites, Half-Plane, Math Model, High strength

1. บทนำ

ปัจจุบันแกรฟีนมีการศึกษาและประยุกต์มากมาย ซึ่งมีงานวิจัยที่เกี่ยวกับการเคลือบด้วยแกรฟีนได้เพิ่มขึ้นเป็นจำนวนมาก โดยอ้างอิงจากเว็บไซต์ Web of science ฐานข้อมูล 2017 มีมากกว่า 8,902 งานวิจัยเกี่ยวกับการเคลือบด้วยแกรฟีน เผยแพร่สู่สาธารณะ [1] แกรฟีนเป็นวัสดุที่ประกอบด้วยชั้นของอะตอมคาร์บอนที่หนาเพียงหนึ่งชั้น มีลักษณะเป็นแผ่นที่มีโครงสร้างสองมิติ เหมือนตาข่ายรูปหกเหลี่ยมคล้ายรังผึ้ง มีความหนาเท่ากับขนาดของคาร์บอนเพียงอะตอมเดียวที่แสดงดังรูปที่ 1 คุณสมบัติแกรฟีนที่โดดเด่นคือ มีกำลังสูง มีคุณสมบัติการนำความร้อนได้ดี นำไฟฟ้าได้ดี วัสดุมีความโปร่งใส และ กันน้ำ สูงที่สุดเมื่อเทียบกับวัสดุอื่น การนำแกรฟีนมาประยุกต์ใช้ทำได้โดยการแปรรูป ซึ่งสามารถแปรรูปได้หลายรูปแบบ [2]

แกรฟีนบริสุทธิ์มีข้อเสียคือ ถ้าหากการเคลือบด้วยแกรฟีนบริสุทธิ์ได้รับความเสียหาย จะทำให้การกัดกร่อนของโลหะเกิดขึ้นเร็วขึ้นด้วยอัตราเร็วที่เพิ่มขึ้น จึงมีการนำแกรฟีนมาผสมกับวัสดุอื่นทำให้เกิดเป็นวัสดุเชิงประกอบผสมแผ่นแกรฟีน โดยการเติม ไฮดรอกไซด์, กรดคาร์บอกซิลิก, ออกซิเจน, และการกระตุ้นด้วยรังสีอัลตราไวโอเลต กระบวนการเหล่านี้ทำให้ได้ ฟังก์ชัน

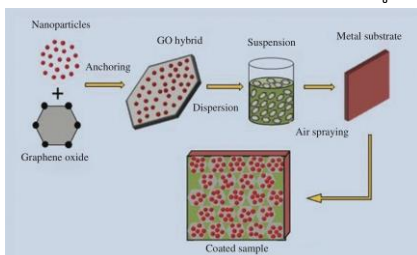
แกรฟีน, แกรฟีนออกไซด์, ริดิซแกรฟีนออกไซด์ ซึ่งทำให้เกิดเป็นวัสดุเชิงประกอบผสมแผ่นแกรฟีนที่ถูกปรับปรุงคุณสมบัติตามที่เราต้องการ ในปัจจุบันมีการพิสูจน์แล้วว่าการเคลือบด้วยวัสดุเชิงประกอบผสมแผ่นแกรฟีนในรูปแบบของการเคลือบสามารถแยกพื้นผิวของเหล็กออกจากสภาวะแวดล้อมภายนอกทำดี [3]



รูปที่ 1 โครงสร้างของแกรฟีน

การเคลือบวัสดุเชิงประกอบของแกรฟีนในเมทริกซ์โพลีเมอร์ (Graphene polymer matrix composite coating, GPMCCs) เป็นการประยุกต์ใช้วัสดุเชิงประกอบผสมแผ่นแกรฟีน จุดประสงค์ของการเคลือบนี้เพื่อป้องกันการกัดกร่อน โดยวัสดุเชิงประกอบนี้จะประกอบด้วยองค์ประกอบหลักสองส่วนคือ แกรฟีนและโพลีเมอร์ ซึ่งโพลีเมอร์จะช่วยเสริมแรง และทำให้โมเลกุลของอิเล็กโทรไลต์เจาะผ่านจุดฉีกขาดของแกรฟีนได้ยาก แกรฟีนในโพลีเมอร์ไม่เพียงแต่ช่วยเพิ่มการป้องกันการกัดกร่อนเท่านั้น แต่ยังช่วยปรับปรุงสมบัติกำลัง และช่วยป้องกันการเกิดแตกหักของพื้นผิวโลหะ ทำให้การเคลือบมีความทนทานและประสิทธิภาพที่ดีขึ้น ปัจจุบันมีการประยุกต์ใช้การเคลือบด้วยวัสดุเชิงประกอบผสมแผ่นแกรฟีนมากมายยกตัวอย่างเช่น เลนส์แว่น โดยคุณสมบัติด้านกำลังที่สูงช่วยลดรอยขีดข่วนของเลนส์แว่น และคุณสมบัติป้องกันการกัดกร่อนช่วยปกป้องผิวเลนส์จากการเปลี่ยนแปลงของความชื้นและความเป็นเบสที่สูง อีกตัวอย่างคือใบพัดเรือ ซึ่งเป็นส่วนที่ต้องรับแรงจากการใช้งานสูงและการกัดกร่อนจากน้ำทะเล [4]

การเคลือบวัสดุเชิงประกอบของแกรฟีนในเมทริกซ์โพลีเมอร์ที่ผู้จัดทำโปรเจกต์เลือกใช้คือ แกรฟีนออกไซด์ผสมกับอีพอกซี อีพอกซีเป็นโพลีเมอร์ชนิดหนึ่งที่มีคุณสมบัติผสมกับสารช่วยบ่มหรือสารทำให้แข็งจะเกิดปฏิกิริยาทางเคมีจนกลายเป็นวัสดุที่เหนียวและแข็ง (Hussain et al., 2019) กระบวนการขึ้นรูปทำได้โดยนำแกรฟีนแผ่น ซึ่งมีลักษณะเป็นแผ่นบางมาทำการออกซิเดชันจะได้แกรฟีนออกไซด์ แล้วนำมาผสมกับอีพอกซี จากนั้นทำการกระจายตัวเป็นสารแขวนลอย เมื่อได้สารแขวนลอยแล้วจะนำมาเคลือบที่ผิวของวัสดุตามที่เราต้องการโดยใช้เทคนิค การเคลือบแบบพ่นสเปรย์ เทคนิคนี้เหมาะสำหรับการเคลือบพื้นที่ขนาดใหญ่และสามารถให้ชั้นวัสดุเชิงประกอบหนาที่เป็นเนื้อเดียวกันและบาง [3] ซึ่งแสดงดังรูปที่ 2



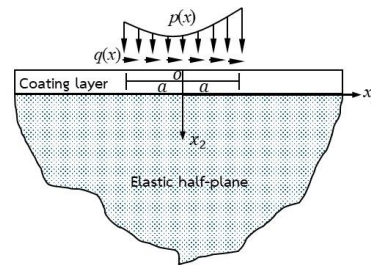
รูปที่ 2 กระบวนการเคลือบด้วยวัสดุเชิงประกอบผสมแผ่นแกรฟีน

ทางผู้จัดทำโครงการเห็นประโยชน์ของการเคลือบด้วยวัสดุเชิงประกอบผสมแผ่นแกรฟีน ซึ่งจะช่วยพัฒนาความสามารถในการป้องกันการกัดกร่อนและคุณสมบัติด้านกำลังสูง โครงการนี้จะมุ่งเน้นไปที่การศึกษาคุณสมบัติด้านกำลังของการเคลือบผิว โดยการจำลองหน่วยแรงแก่กระจายคงที่มีเขตพื้นที่เล็กๆ ณ ผิวเคลือบ แล้ววิเคราะห์ว่าหน่วยแรงที่ถ่ายไปยังฐานกึ่งปริภูมิสองมิติ (Half-plane) หรือวัสดุที่ถูกเคลือบจะเป็นอย่างไร ซึ่งเราจะศึกษาโดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

2. สมการทั่วไปและสมการกำกับ

2.1 คำอธิบายปัญหา

พิจารณาปัญหาสองมิติสำหรับวัสดุเชิงเส้นที่มีคุณสมบัติเหมือนกันทุกทิศทางแบบเอกพันธ์ของวัสดุที่มีพื้นฐานเป็นกึ่งปริภูมิสองมิติและมีชั้นผิวเคลือบเป็นวัสดุเชิงประกอบวางอยู่ข้างบนหนึ่งชั้นโดยที่รอยต่อมีการยึดติดกันอย่างสมบูรณ์ดังรูปที่ 2.1 โดยระบบพิกัดใช้ $\{x_1, x_2, O\}$ โดย O คือพิกัดเริ่มต้นที่ผิวบนของวัสดุที่พิจารณา x_1 คือพิกัดแนวระนาบไปทางขวา x_2 คือพิกัดแนวตั้งลงไปตามล่าง ที่ผิวชั้นที่หนึ่งเป็นวัสดุเชิงประกอบที่ประกอบด้วยสองวัสดุคือแผ่นแกรฟีนและอีพอกซี โดยชั้นผิวเคลือบมีความหนา h วัดจากพิกัด O ลงมาด้านล่าง ที่ชั้นฐานกึ่งปริภูมิสองมิติใช้วัสดุแมกนีเซียมอัลลอย ที่ผิวบนของชั้นผิวเคลือบมีหน่วยแรงกระจายสม่ำเสมอในแนวตั้ง $q(x)$ กระทำในทิศ x_2 และมีหน่วยแรงเฉือนในแนวระนาบ $p(x)$ กระทำในทิศ x_1 ในระยะจำกัด $-a \leq x_1 \leq a$ โดยปัญหานี้จะไม่พิจารณาผลของแรงกระทำต่อปริมาตร (Body force) โดยสำหรับโครงการนี้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะสร้างขึ้นเพื่ออธิบายพฤติกรรมทางกลของวัสดุชั้นฐานกึ่งปริภูมิสองมิติที่ถูกเคลือบด้วยชั้นผิวเคลือบหนึ่งชั้นที่เป็นวัสดุเชิงประกอบ



รูปที่ 2.1 แบบจำลองชั้นฐานกึ่งปริภูมิสองมิติที่มีชั้นผิวเคลือบเป็นวัสดุเชิงประกอบวางอยู่ข้างบนหนึ่งชั้นโดยรอยต่อมีการยึดติดกันอย่างสมบูรณ์

2.2 คุณสมบัติสุดท้ายของวัสดุเชิงประกอบ

ผู้จัดทำจะคำนวณคุณสมบัติสุดท้ายของวัสดุเชิงประกอบโดยใช้แบบจำลองจุลศาสตร์เชิงกลของ Halpin-Tsia [5] ในการคำนวณโมดูลัสของยัง

$$E_c = \frac{3}{8} \frac{1 + \xi_{11} \eta_{11} V_{GPL}}{1 - \eta_{11} V_{GPL}} E_m + \frac{5}{8} \frac{1 + \xi_{22} \eta_{22} V_{GPL}}{1 - \eta_{22} V_{GPL}} E_m \quad (2.1)$$

$$\eta_{11} = \frac{(E_{GPL}/E_m) - 1}{(E_{GPL}/E_m) + \xi_{11}} \quad (2.2)$$

$$\eta_{22} = \frac{(E_{GPL}/E_m) - 1}{(E_{GPL}/E_m) + \xi_{22}} \quad (2.3)$$

$$\xi_{11} = 2 \left(\frac{l}{t} \right) \quad (2.4)$$

$$\xi_{22} = 2 \left(\frac{w}{t} \right) \quad (2.5)$$

โดยที่ E_c คือโมดูลัสของยังของวัสดุเชิงประกอบ E_m คือโมดูลัสของยังของวัสดุเนื้อพื้น E_{GPL} คือโมดูลัสของยังของวัสดุแกรฟีน V_{GPL} คือสัดส่วนของปริมาณแกรฟีน ξ_{11} คือพารามิเตอร์รูปร่างตามแนวยาวของแผ่นแกรฟีน ξ_{22} คือพารามิเตอร์รูปร่างตามแนวขวางของแผ่นแกรฟีน l, w, t คือความยาว ความกว้าง และความหนาของแผ่นแกรฟีนตามลำดับ

เมื่อผู้จัดทำพิจารณาวัสดุเชิงประกอบที่เกิดจากการนำวัสดุสองชนิดคือแผ่นแกรฟีนผสมกับอีพอกซี ดังนั้นการคำนวณอัตราส่วนปัวซองจะคำนวณโดยใช้โดยใช้กฎของการผสมโดยใช้สูตร ดังนี้

$$v_c = v_m V_m + v_{GPL} V_{GPL} \quad (2.6)$$

โดยที่ v_c คืออัตราส่วนปัวซองของวัสดุเชิงประกอบ v_m คืออัตราส่วนปัวซองของวัสดุเนื้อพื้น V_m คืออัตราส่วนร้อยละของปริมาณวัสดุเนื้อพื้นที่ผสมต่อปริมาตรรวม v_{GPL} คืออัตราส่วนปัวซองของวัสดุแกรฟีน V_{GPL} คืออัตราส่วนร้อยละของแกรฟีนที่ผสมต่อปริมาตรรวม และสำหรับการคำนวณโมดูลัสแรงเฉือนของวัสดุเชิงประกอบสามารถคำนวณได้จากสูตรข้างต้น

$$\mu_c = \frac{E_c}{2(1+v_c)} \quad (2.7)$$

โดยที่ E_c คือโมดูลัสของยังของวัสดุเชิงประกอบ μ_c คือโมดูลัสแรงเฉือนของวัสดุเชิงประกอบ

2.3 สมการพื้นฐานสำหรับปัญหาวัสดุยืดหยุ่นเชิงเส้นสองมิติ

ผู้จัดทำจะสร้างสมการกำกับในปริภูมิกายภาพ (Physical space) โดยใช้พิกัด (X_1, X_2) จากทฤษฎียืดหยุ่นเชิงเส้นเพื่อสร้างสมการกำกับในการวิเคราะห์ผลการตอบสนองเชิงกลของวัสดุ โดยมีสมการพื้นฐานดังต่อไปนี้

เมื่อผู้จัดทำพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการกระจัดจะสามารถคำนวณได้โดยใช้สมการดังต่อไปนี้

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \epsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \epsilon_{12} = \epsilon_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad (2.8)$$

โดยที่ $\{\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{12} = \epsilon_{21}\}$ คือองค์ประกอบของเทนเซอร์ (Tensor) ความเครียดสมมาตร จากนั้นพิจารณาสมการสมดุลของกฎการอนุรักษ์ (Hooke's law plane strain condition) สามารถคำนวณได้โดยใช้สมการดังต่อไปนี้

$$\sigma_{11} = \frac{2\mu}{(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_{11} + \nu\epsilon_{22}] \quad (2.9)$$

$$\sigma_{22} = \frac{2\mu}{(1-2\nu)} [\nu\epsilon_{11} + (1-\nu)\epsilon_{22}] \quad (2.10)$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = 2\mu\epsilon_{12} \quad (2.11)$$

โดยที่ $\{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12} = \sigma_{21}\}$ คือองค์ประกอบของเทนเซอร์ความเครียดสมมาตร จากนั้นพิจารณาสมการสมดุลของกฎการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้นโดยไม่พิจารณาผลของแรงกระทำต่อปริมาตรสามารถคำนวณได้โดยใช้สมการดังต่อไปนี้

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + b_1 = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + b_2 = 0 \quad (2.13)$$

โดยที่ $\{b_1, b_2\}$ คือแรงกระทำต่อปริมาตร

2.4 สมการกำกับสำหรับปัญหายืดหยุ่นเชิงเส้นสองมิติ

จากหัวข้อ 2.3 ผู้จัดทำจะแทนความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการกระจัด ซึ่งเป็นสมการที่ (2.8) ลงในกฎของฮุกในเงื่อนไขของความเครียดระนาบ ซึ่งเป็นสมการที่ (2.9) ถึง (2.11) จะสามารถสร้างความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและการกระจัดได้ดังนี้

$$\sigma_{11} = \frac{2\mu}{(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right] \quad (2.14)$$

$$\sigma_{22} = \frac{2\mu}{(1-2\nu)} \left[\nu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (1-\nu) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right] \quad (2.15)$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad (2.16)$$

เมื่อทราบสมการพื้นฐานต่างๆแล้วจึงแทนความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและการกระจัด ซึ่งเป็นสมการที่ (2.14) ถึง (2.16) ลงในสมการสมดุล ซึ่งเป็นสมการที่ (2.12) ถึง (2.13) จะได้สมการกำกับที่เขียนในรูปของการกระจัด ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ได้ดังนี้

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) + \frac{2\mu}{\kappa-1} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = 0 \quad (2.17)$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) + \frac{2\mu}{\kappa-1} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = 0 \quad (2.18)$$

โดยที่ μ คือโมดูลัสแรงเฉือนของตัวกลาง u_1 คือการกระจัดแนวราบในปริภูมิกายภาพ u_2 คือการกระจัดแนวตั้งในปริภูมิกายภาพ และ κ คือ $3 - 4\nu$

3. ขั้นตอนการหาคำตอบ

จากบทก่อนหน้าผู้จัดทำได้พัฒนาสมการกำกับที่อยู่ในรูปของการกระจัดที่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย แต่เนื่องจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่สามารถหาผลเฉลยทั่วไปของสมการได้ ดังนั้นผู้จัดทำจึงจะทำการแปลงสมการกำกับให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ด้วยระเบียบวิธีการแปลงฟูเรียร์ [6] เพื่อหาผลเฉลยทั่วไปของการกระจัดและหน่วยแรงของชั้นผิวเคลือบและชั้นฐานกึ่งปริภูมิสองมิติ โดยผลเฉลยจะอยู่ในปริภูมิการแปลง จากนั้นผู้จัดทำจะกำหนดคุณสมบัติความต่อเนื่องและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา แล้วจึงสร้างระบบสมการเชิงเส้นจากความต่อเนื่องและเงื่อนไขขอบเขตของแบบจำลองเพื่อใช้ในการหาตัวแปรไม่ทราบค่าของผลเฉลยทั่วไป เมื่อหาค่าของตัวแปรไม่ทราบค่าได้แล้วจึงแทนกลับเข้าไปที่ผลเฉลยทั่วไป แล้วจึงแปลงผลเฉลยทั่วไปให้อยู่ในปริภูมิกายภาพ ด้วยระเบียบวิธีการแปลงฟูเรียร์ผกผันแล้วจึงหาค่าปริพันธ์ด้วยระเบียบเกาส์ควอดราเจอร์

3.1 การแปลงฟูเรียร์

จากหัวข้อ 2.4 จะได้สมการกำกับ ซึ่งเป็นสมการที่ (2.17) และ (2.18) ที่อยู่ในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ดังนั้นเพื่อหาผลเฉลยจึงต้องแปลงสมการกำกับให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ผู้จัดทำจะใช้วิธีการแปลงฟูเรียร์ ดังสมการต่อไปนี้

$$\bar{f} = \bar{f}(\xi, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) e^{i\xi x_1} dx_1 \quad (3.1)$$

$$f = \bar{f}(\xi, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\xi, x_2) e^{-i\xi x_1} d\xi \quad (3.2)$$

โดยที่ \bar{f} คือฟังก์ชันในปริภูมิการแปลง f คือฟังก์ชันในปริภูมิกายภาพ ξ คือพารามิเตอร์การแปลง และ $i = \sqrt{-1}$ เป็นหน่วยจำนวนจินตภาพ และสำหรับการแปลงฟูเรียร์กับสมการเชิงอนุพันธ์สามารถคำนวณได้ตามสมการต่อไปนี้

$$\left(\frac{d^n f}{dx_1^n}\right) = (-i\xi)^n \bar{f} \quad (3.3)$$

จากนั้นพิจารณาแปลงสมการกำกับในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ซึ่งเป็นสมการที่ (2-17) ถึง (2-18) โดยใช้การแปลงฟูเรียร์ ซึ่งเป็นสมการที่ (3.3) จะได้สมการกำกับในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญได้ดังนี้

$$\mu \left((-i\xi)^2 \bar{u}_1 + \frac{d^2 \bar{u}_1}{dx_2^2} \right) + \frac{2\mu}{\kappa-1} \left((-i\xi)^2 + (-i\xi) \frac{d\bar{u}_2}{dx_2} \right) = 0 \quad (3.4)$$

$$\mu \left((-i\xi)^2 \bar{u}_2 + \frac{d^2 \bar{u}_2}{dx_2^2} \right) + \frac{2\mu}{\kappa-1} \left((-i\xi) \frac{d\bar{u}_1}{dx_2} + (-i\xi) \frac{d^2 \bar{u}_2}{dx_2^2} \right) = 0 \quad (3.5)$$

โดยที่ \bar{u}_1 คือการกระจัดแนวราบในปริภูมิการแปลง \bar{u}_2 คือการกระจัดแนวตั้งในปริภูมิการแปลง

3.2 ผลเฉลยทั่วไปของสมการกำกับ

เมื่อได้สมการกำกับในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ผู้จัดทำจะจัดสมการกำกับให้อยู่ในรูปแบบของระบบสมการอนุพันธ์ลำดับที่ 2 ตีกริ 1 ดังต่อไปนี้

$$A \frac{d^2 \bar{u}}{dx_2^2} + B \frac{d\bar{u}}{dx_2} + C \bar{u} = 0 \quad (3.6)$$

โดยที่ $\bar{u} = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ คือการกระจัดในปริภูมิการแปลงและมีเมทริกซ์คงที่ A, B, C มีค่าดังต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} \kappa - 1 & 0 \\ 0 & \kappa + 1 \end{bmatrix}, \quad B = -2i\xi \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ C = -\xi^2 \begin{bmatrix} (\kappa+1) & 0 \\ 0 & (\kappa-1) \end{bmatrix}$$

เมื่อจัดสมการกำกับในรูปแบบของระบบสมการกำลังสองแล้ว จึงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการกำกับโดยกำหนดให้ผลเฉลยของสมการกำกับอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\bar{u} = e^{\gamma x_2} \eta \quad (3.7)$$

โดยที่ γ คือ ค่าลักษณะเฉพาะ (Eigen value) และ η คือ ค่าเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ (Eigen vector) จากนั้นแทนสมการที่ (3.7) ลงในสมการที่ (3.6) และจัดรูปสมการจะได้สมการดังนี้

$$(\gamma^2 A + \gamma B + C)\eta = 0 \quad (3.8)$$

โดยเมื่อแทนค่า A, B, C ลงในสมการ (3.8) จะสามารถสร้างเป็นเมทริกซ์ได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} \mu\gamma^2 - \frac{2\mu(1-\nu)\xi^2}{1-2\nu} & -\left(\mu + \frac{2\mu\nu}{(1-2\nu)}\right) i\xi\gamma \\ -\left(\mu + \frac{2\mu\nu}{(1-2\nu)}\right) i\xi\gamma & \left(\frac{2\mu(1-\nu)\gamma^2}{1-2\nu} - \mu\xi^2\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

เนื่องจากสมการ (3.9) เป็นระบบสมการเชิงเส้นเอกเพื่อหาคำตอบผลเฉลยไม่ชัด (Non-trivial solution) ดังนั้นผู้จัดทำจึงพิจารณาเมทริกซ์สัมประสิทธิ์เป็นเมทริกซ์เอกฐาน เงื่อนไขดังต่อไปนี้ต้องเป็นจริงเท่านั้น

$$\det(\gamma^2 A + \gamma B + C) = 0 \quad (3.10)$$

คำนวณสมการที่ (3.10) และจัดรูปจะได้สมการดังต่อไปนี้

$$(\kappa^2 - 1)(\gamma^2 - \xi^2)^2 = 0 \quad (3.11)$$

คำนวณสมการที่ (3.11) เพื่อหาค่าลักษณะเฉพาะจะได้ผลลัพธ์ดังต่อไปนี้

$$\gamma_1 = |\xi|, \quad \gamma_2 = -|\xi|, \quad \gamma_3 = |\xi|, \quad \gamma_4 = -|\xi| \quad ; \text{ (รากซ้ำ)}$$

จากนั้นแทนค่าลักษณะเฉพาะ $\gamma_1 = |\xi|, \gamma_2 = -|\xi|$ ลงในสมการ (3.9) จะได้ค่าเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ η_1, η_2 ดังนี้

$$\eta_1 = \begin{Bmatrix} |\xi| \\ i\xi \end{Bmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{Bmatrix} |\xi| \\ -i\xi \end{Bmatrix}$$

จากการคำนวณสมการที่ (3.11) จะเห็นว่าค่าลักษณะเฉพาะที่หาได้เป็นรากซ้ำสองค่าซึ่งต้องมีคำตอบ ดังนั้นผู้จัดทำจะกำหนดให้ค่าลักษณะเฉพาะที่หาได้จากสมการที่ (3.7) เป็นหนึ่งในคำตอบของสมการที่ (3.6) ดังนั้นจึงต้องหาคำตอบที่เหลือโดยกำหนดให้ผลเฉลยทั่วไปของสมการที่ (3.6) อยู่ในรูปแบบดังต่อไปนี้

$$\bar{u} = x_2 e^{\gamma x_2} \eta + e^{\gamma x_2} \rho \quad (3.12)$$

โดยที่ ρ คือ ค่าลักษณะเฉพาะ จากนั้นจึงแทนสมการที่ (3.12) ลงในสมการที่ (3.6) จะได้สมการในรูปแบบดังต่อไปนี้

$$x_2 e^{\gamma x_2} (\gamma^2 A + \gamma B + C)\eta + e^{\gamma x_2} [(2\gamma A + B)\eta + (\gamma^2 A + \gamma B + C)\rho] = 0 \quad (3.13)$$

จากขั้นตอนก่อนหน้าผู้จัดทำสามารถหาค่าสมการที่ (3.10) มาก่อนแล้วดังนั้นจึงแทนลงในสมการที่ (3.13) และจัดรูปสมการจะได้สมการดังต่อไปนี้

$$[(2\gamma A + B)\eta + (\gamma^2 A + \gamma B + C)\rho] = 0 \quad (3.14)$$

จากนั้นแทนค่าลักษณะเฉพาะที่เป็นรากซ้ำจากการคำนวณสมการที่ (3.11) และเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะลงในสมการที่ (3.14) จะได้

$$\rho_1 = \begin{Bmatrix} \kappa \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \rho_2 = \begin{Bmatrix} -\kappa \\ 0 \end{Bmatrix}$$

จากสมการที่ (3.7) และ (3.12) จะได้ว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการที่ (3.6) ซึ่งสอดคล้องกับรากซ้ำ ดังนั้นผู้จัดทำสามารถสร้างผลเฉลยของสมการกำกับในรูปแบบของการกระจัดได้ดังต่อไปนี้

$$\bar{u} = C_1 e^{|\xi|x_2} \eta + C_2 (x_2 e^{|\xi|x_2} \eta + e^{|\xi|x_2} \rho) \quad (3.15)$$

จากนั้นแทนค่าลักษณะเฉพาะ γ เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ η และเวกเตอร์ค่าคงที่ ρ แทนลงในผลเฉลยทั่วไปของการกระจัด ซึ่งเป็นสมการที่ (3.15) จะได้ผลเฉลยทั่วไปของการกระจัดดังนี้

$$\bar{u} = C_1 e^{|\xi|x_2} \begin{Bmatrix} |\xi| \\ i\xi \end{Bmatrix} + C_2 \left(x_2 e^{|\xi|x_2} \begin{Bmatrix} |\xi| \\ i\xi \end{Bmatrix} + e^{|\xi|x_2} \begin{Bmatrix} \kappa \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \\ + C_3 e^{-|\xi|x_2} \begin{Bmatrix} |\xi| \\ -i\xi \end{Bmatrix} + C_4 \left(x_2 e^{-|\xi|x_2} \begin{Bmatrix} |\xi| \\ -i\xi \end{Bmatrix} + e^{-|\xi|x_2} \begin{Bmatrix} -\kappa \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \quad (3.16)$$

โดยที่ C_1, C_2, C_3, C_4 คือค่าคงที่ไม่ทราบค่า จากนั้นทำการแจกแจงผลเฉลยทั่วไปของการกระจัด ซึ่งเป็นสมการที่ (3.16) ในแนวตั้งและแนวระนาบได้ดังนี้

$$\bar{u}_1 = C_1 e^{|\xi|x_2} |\xi| + C_2 (x_2 |\xi| + \kappa) e^{|\xi|x_2} + C_3 e^{-|\xi|x_2} |\xi| + C_4 (x_2 |\xi| - \kappa) e^{-|\xi|x_2} \quad (3.17)$$

$$\bar{u}_2 = C_1 e^{|\xi|x_2} i\xi + C_2 (x_2 i\xi) e^{|\xi|x_2} - C_3 e^{-|\xi|x_2} i\xi - C_4 (x_2 i\xi) e^{-|\xi|x_2} \quad (3.18)$$

3.3 ผลเฉลยทั่วไปในรูปของการกระจัดและหน่วยแรงของชั้นเคลือบและชั้นฐานกึ่งปริภูมิสองมิติ

ขั้นตอนในการพัฒนาสมการกำกับ ซึ่งเป็นสมการที่ (2.17) และ (2.18) ให้เป็นผลเฉลยทั่วไป ซึ่งเป็นสมการที่ (3.17) ถึง (3.18) ของชั้นผิวเคลือบและชั้นฐานกึ่งปริภูมิสองมิตินั้นมีขั้นตอนเหมือนกัน ยกเว้นขอบเขตแนวแกน x_2 โดยชั้นผิวเคลือบมีระยะในแกน x_2 จำกัดซึ่งเท่ากับ h แต่ชั้นฐานกึ่งปริภูมิสองมิติมีระยะในแกน x_2 เป็นอนันต์ ดังนั้นสามารถสร้างผลเฉลยทั่วไปของการกระจัดของชั้นผิวเคลือบได้ดังนี้

$$\bar{u}_1^C = C_1 e^{|\xi|x_2} |\xi| + C_2 (x_2 |\xi| + \kappa_c) e^{|\xi|x_2} + C_3 e^{-|\xi|x_2} |\xi| + C_4 (x_2 |\xi| - \kappa_c) e^{-|\xi|x_2} \quad (3.19)$$

$$\bar{u}_2^C = C_1 e^{|\xi|x_2} i\xi + C_2 (x_2 i\xi) e^{|\xi|x_2} - C_3 e^{-|\xi|x_2} i\xi - C_4 (x_2 i\xi) e^{-|\xi|x_2} \quad (3.20)$$

โดยที่ \bar{u}_1^C คือการกระจัดในแนวระนาบในปริภูมิการแปลงของชั้นเคลือบ \bar{u}_2^C คือการกระจัดในแนวตั้งในปริภูมิการแปลงของชั้นเคลือบและ C_1, C_2, C_3, C_4 คือค่าคงที่ไม่ทราบค่าและ κ_c คือ $3 - 4\nu_c$

ผู้จัดทำจะพิจารณาผลเฉลยที่ชั้นฐานกึ่งปริภูมิสองมิติมีความลึกเป็นอนันต์ ผลเฉลยทั่วไป ซึ่งเป็นสมการที่ (3.17) และ (3.18) ที่ความลึกเป็นอนันต์ต้องมีค่าเท่ากับศูนย์ทำให้พจน์ C_1, C_2 ของชั้นฐานกึ่งปริภูมิสองมิติต้องมีค่าเท่ากับศูนย์ ซึ่งสามารถสร้างผลเฉลยทั่วไปของชั้นฐานกึ่งปริภูมิสองมิติได้ ดังต่อไปนี้

$$\bar{u}_1^H = C_5 e^{-|\xi|x_2} |\xi| + C_6 (x_2 |\xi| - \kappa) e^{-|\xi|x_2} \quad (3.21)$$

$$\bar{u}_2^H = -C_5 e^{-|\xi|x_2} i\xi - C_6 (x_2 i\xi) e^{-|\xi|x_2} \quad (3.22)$$

โดยที่ \bar{u}_1^H คือการกระจัดในแนวระนาบในปริภูมิการแปลงของชั้นฐานกึ่งปริภูมิสองมิติ \bar{u}_2^H คือการกระจัดในแนวตั้งในปริภูมิการแปลงของชั้นฐานกึ่งปริภูมิสองมิติและ C_5, C_6 คือค่าคงที่ไม่ทราบค่าและ κ คือ $3 - 4\nu$ จากนั้นพิจารณาผลเฉลยทั่วไปในรูปของหน่วยแรงหาโดยแทนผลเฉลยทั่วไปของการกระจัด ซึ่งเป็นสมการที่ (3.17) และ (3.18) ลงในความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและการกระจัด ซึ่งเป็นสมการที่ (2.15) และ (2.16) แต่เนื่องจากสมการยังอยู่ในปริภูมิกายภาพ ดังนั้นจึงต้องแปลงสมการให้อยู่ในปริภูมิการแปลงเพื่อให้สอดคล้องกับผลเฉลยทั่วไปโดยใช้การแปลงฟูเรียร์สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งเป็นสมการที่ (3.3) ได้สมการดังนี้

$$\bar{\sigma}_{22} = -\mu \frac{3-\kappa}{\kappa-1} i\xi \bar{u}_1 + \mu \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{d\bar{u}_2}{dx_2} \quad (3.23)$$

$$\bar{\sigma}_{12} = \bar{\sigma}_{21} = \mu \left(\frac{d\bar{u}_1}{dx_2} - i\xi \bar{u}_2 \right) \quad (3.24)$$

โดยที่ $\bar{\sigma}_{22}$ คือหน่วยแรงแนวตั้งในปริภูมิการแปลง $\bar{\sigma}_{12}$ คือหน่วยแรงแนวระนาบในปริภูมิการแปลง จากนั้นแทนผลเฉลยทั่วไปของการกระจัดของชั้นผิวเคลือบและชั้นฐานกึ่งปริภูมิสองมิติ ซึ่งเป็นสมการที่ (3.19) ถึง (3.22) ลงในลงในความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและการกระจัดในปริภูมิการแปลง ซึ่งเป็นสมการที่ (3.23) และ (3.24) ได้ผลเฉลยทั่วไปของหน่วยแรงของชั้นผิวเคลือบและชั้นฐานกึ่งปริภูมิสองมิติ ดังนี้ ผลเฉลยทั่วไปของหน่วยแรงของชั้นผิวเคลือบสามารถเขียนได้ว่า

$$\frac{\bar{\sigma}_{22}^C}{2\mu_c} = C_1 i\xi |\xi| e^{|\xi|x_2} + C_2 i \left(-\frac{1-\kappa_c}{2} + |\xi|x_2 \right) \xi e^{|\xi|x_2} + C_3 i\xi |\xi| e^{-|\xi|x_2} + C_4 i \left(-\frac{\kappa_c-1}{2} + |\xi|x_2 \right) \xi e^{-|\xi|x_2} \quad (3.25)$$

$$\frac{\bar{\sigma}_{12}^C}{2\mu_c} = C_1 \xi^2 e^{|\xi|x_2} + C_2 \left(\frac{\kappa_c+1}{2} + |\xi|x_2 \right) |\xi| e^{|\xi|x_2} - C_3 \xi^2 e^{-|\xi|x_2} + C_4 \left(\frac{\kappa_c+1}{2} - |\xi|x_2 \right) |\xi| e^{-|\xi|x_2} \quad (3.26)$$

โดยที่ $\bar{\sigma}_{22}^C$ คือหน่วยแรงแนวตั้งในปริภูมิการแปลงของชั้นเคลือบ $\bar{\sigma}_{12}^C$ คือหน่วยแรงแนวระนาบในปริภูมิการแปลงของชั้นเคลือบและ μ_c คือ ค่าโมดูลัสแรงเฉือนของชั้นผิวเคลือบ และ ผลเฉลยทั่วไปของหน่วยแรงของฐานกึ่งปริภูมิสองมิติสามารถเขียนได้ว่า

$$\frac{\bar{\sigma}_{22}^H}{2\mu} = C_5 i\xi |\xi| e^{-|\xi|x_2} + C_6 i \left(-\frac{\kappa-1}{2} + |\xi|x_2 \right) \xi e^{-|\xi|x_2} \quad (3.27)$$

$$\frac{\bar{\sigma}_{12}^H}{2\mu} = -C_5 \xi^2 e^{-|\xi|x_2} + C_6 \left(\frac{\kappa+1}{2} - |\xi|x_2 \right) |\xi| e^{-|\xi|x_2} \quad (3.28)$$

โดยที่ $\bar{\sigma}_{22}^H$ คือหน่วยแรงแนวตั้งในปริภูมิการแปลงของชั้นเคลือบ $\bar{\sigma}_{12}^H$ คือหน่วยแรงแนวระนาบในปริภูมิการแปลงของชั้นเคลือบและ μ คือ ค่าโมดูลัสแรงเฉือนของชั้นฐานกึ่งปริภูมิสองมิติ

3.4 เงื่อนไขขอบเขตและความต่อเนื่อง

เงื่อนไขขอบเขตของแบบจำลอง รูปที่ 2.1 แบ่งได้เป็นสามส่วน ส่วนแรกคือหน่วยแรงในแนวตั้งและหน่วยแรงเฉือนในแนวระนาบที่ชั้นผิวเคลือบที่บนผิวสัมผัสเท่ากับหน่วยแรงในแนวตั้งภายนอก $p(x_1)$ และหน่วยแรงเฉือนแนวระนาบ $q(x_1)$ ที่กระทำที่บนชั้นเคลือบ ส่วนที่สองคือ การกระจัดแนวตั้งและแนวระนาบที่ผิวรอยต่อของชั้นผิวเคลือบและชั้นฐานกึ่งปริภูมิสองมิติมีค่าเท่ากัน ส่วนสุดท้ายคือ หน่วยแรงในแนวตั้งและหน่วยแรงเฉือนในแนวระนาบที่ผิวรอยต่อของชั้นผิวเคลือบและชั้นฐานกึ่งปริภูมิสองมิติมีค่าเท่ากันโดยจะแสดงสมการตามลำดับ

$$\bar{\sigma}_{22}^C(\xi, 0) = \bar{p}(\xi, 0) \quad (3.29)$$

$$\bar{\sigma}_{12}^C(\xi, 0) = \bar{q}(\xi, 0) \quad (3.30)$$

$$\bar{u}_2^C(\xi, h) = \bar{u}_2^H(\xi, 0) \quad (3.31)$$

$$\bar{u}_1^C(\xi, h) = \bar{u}_1^H(\xi, 0) \quad (3.32)$$

$$\bar{\sigma}_{22}^C(\xi, h) = \bar{\sigma}_{22}^H(\xi, 0) \quad (3.33)$$

$$\bar{\sigma}_{12}^C(\xi, h) = \bar{q}(\xi, 0) \quad (3.34)$$

ผู้จัดทำจะพิจารณาหน่วยแรงในแนวตั้งและหน่วยแรงเฉือนในแนวระนาบที่ชั้นผิวเคลือบที่บนผิวสัมผัสเท่ากับหน่วยแรงในแนวตั้งภายนอก $p(x_1)$ และหน่วยแรงเฉือนภายนอก $q(x_1)$ ที่กระทำที่ผิว แต่เนื่องจากผลเฉลยทั่วไปของหน่วยแรงในแนวตั้งและหน่วยแรงเฉือนอยู่ในปริภูมิการ

แปลง ดังนั้นจึงต้องแปลงหน่วยแรงในแนวตั้งและหน่วยแรงเฉือนในแนวระนาบที่กระทำบนชั้นเคลือบอยู่ในปริภูมิการแปลงโดยใช้ระเบียบวิธีการแปลงฟูเรียร์ ดังนี้

$$\bar{p}(\xi, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, 0) dx_1 \quad (3.35)$$

$$\bar{q}(\xi, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} q(x_1, 0) dx_1 \quad (3.36)$$

จากนั้นสร้างระบบสมการเชิงเส้น 6 ตัวแปรจากเงื่อนไขขอบเขตและความต่อเนื่องโดยใช้ความสัมพันธ์ ซึ่งเป็นสมการที่ (3.29) ถึง (3.34) ได้ดังนี้ หน่วยแรงในแนวตั้งของชั้นผิวเคลือบที่กระทำบนชั้นเคลือบเท่ากับหน่วยแรงในแนวตั้งภายนอกที่กระทำที่ผิวดังสมการที่ (3.29)

$$2\mu_c \left(C_1 i \xi |\xi| + C_2 i \left(-\frac{1-\kappa_c}{2} \right) \xi + C_3 i \xi |\xi| + C_4 i \left(-\frac{\kappa_c-1}{2} \right) \xi \right) = - \int_{-\infty}^{\infty} t_{22} e^{i\xi x_1} dx_1 \quad (3.37)$$

จากนั้นพิจารณาหน่วยแรงเฉือนในแนวระนาบของชั้นผิวเคลือบที่บนผิวสัมผัสเท่ากับหน่วยแรงเฉือนภายนอกที่กระทำที่ผิวดังสมการที่ (3.30)

$$2\mu_c \left(C_1 \xi^2 + C_2 \left(\frac{\kappa_c+1}{2} \right) |\xi| - C_3 \xi^2 + C_4 \left(\frac{\kappa_c+1}{2} \right) |\xi| \right) = - \int_{-\infty}^{\infty} t_{12} e^{i\xi x_1} dx_1 \quad (3.38)$$

ผู้จัดทำจะพิจารณาการกระจัดแนวตั้งและแนวระนาบที่ผิวรอยต่อของชั้นผิวเคลือบและชั้นฐานกึ่งปริภูมิสองมิติ ซึ่งเป็นสมการที่ (3.31) และ (3.32) มีค่าเท่ากับ โดยพิกัด x_2 ที่ผิวรอยต่อของชั้นผิวเคลือบจะมีค่าเท่ากับความหนาของชั้นผิวเคลือบ h และพิกัด x_2 ที่ผิวรอยต่อของชั้นฐานกึ่งปริภูมิสองมิติจะมีค่าเท่ากับ 0 โดยมีสมการดังนี้

$$C_1 e^{|\xi| h} i \xi + C_2 (h i \xi) e^{|\xi| h} - C_3 e^{-|\xi| h} i \xi - C_4 (h i \xi) e^{-|\xi| h} = -C_5 i \xi \quad (3.39)$$

$$C_1 e^{|\xi| h} |\xi| + C_2 (h |\xi| + \kappa_c) e^{|\xi| h} + C_3 e^{-|\xi| h} |\xi| + C_4 (h |\xi| - \kappa_c) e^{-|\xi| h} = C_5 |\xi| + C_6 (-\kappa) \quad (3.40)$$

จากนั้นพิจารณาหน่วยแรงในแนวตั้งและหน่วยแรงเฉือนแนวระนาบที่ผิวรอยต่อของชั้นผิวเคลือบและชั้นฐานกึ่งปริภูมิสองมิติ ซึ่งเป็นสมการที่ (3.33) และ (3.34) มีค่าเท่ากับ โดยพิกัด x_2 ที่ผิวรอยต่อของชั้นผิวเคลือบจะมีค่าเท่ากับความหนาของชั้นผิวเคลือบ h และพิกัด x_2 ที่ผิวรอยต่อของชั้นฐานกึ่งปริภูมิสองมิติจะมีค่าเท่ากับ 0 โดยมีสมการดังนี้

$$2\mu_c \left(C_1 i \xi |\xi| e^{|\xi| h} + C_2 i \left(-\frac{1-\kappa_c}{2} + |\xi| h \right) \xi e^{|\xi| h} + C_3 i \xi |\xi| e^{-|\xi| h} + C_4 i \left(-\frac{\kappa_c-1}{2} + |\xi| h \right) \xi e^{-|\xi| h} \right) = 2\mu \left(C_5 i \xi |\xi| + C_6 i \left(-\frac{\kappa-1}{2} \right) \xi \right) \quad (3.41)$$

$$2\mu_c \left(C_1 \xi^2 e^{|\xi| h} + C_2 \left(\frac{\kappa_c+1}{2} + |\xi| h \right) |\xi| e^{|\xi| h} - C_3 \xi^2 e^{-|\xi| h} + C_4 \left(\frac{\kappa_c+1}{2} - |\xi| h \right) |\xi| e^{-|\xi| h} \right) = 2\mu \left(-C_5 \xi^2 + C_6 \left(\frac{\kappa+1}{2} \right) |\xi| \right) \quad (3.42)$$

3.5 สร้างระบบสมการเชิงเส้นเพื่อหาค่าคงที่ C

จากสมการเงื่อนไขขอบเขตและความต่อเนื่องสมการที่ (3.37) ถึง (3.42) จะได้ว่ามีระบบสมการเชิงเส้น 6 สมการและมีตัวแปรไม่ทราบค่า 6 ค่าคือ $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ ดังนั้นจึงสามารถสร้างความสัมพันธ์เพื่อหาค่าคงที่ทั้ง 6 ค่าได้โดยสามารถสร้างเป็นระบบสมการเชิงเส้นได้ดังนี้วิธีเชิงตัวเลข

$$\bar{A}_{6 \times 6} \bar{C}_{6 \times 1} = \bar{b}_{6 \times 1} \quad (3.43)$$

โดย \bar{A} คือเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ \bar{C} คือเมทริกซ์ตัวแปรไม่ทราบค่าและ \bar{b} คือคำตอบของระบบสมการ โดยสมการที่ (3.43) สามารถสร้างเป็นระบบสมการเชิงเส้นได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{Bmatrix} \quad (3.44)$$

โดย A_{ij} และ b_i สามารถดูได้จาก ภาคผนวก

3.6 ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

หลังจากหาค่าคงที่ไม่ทราบค่า $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ แล้วแทนลงในผลเฉลยทั่วไปของการกระจัดและหน่วยแรงของชั้นเคลือบและชั้นฐานกึ่งปริภูมิสองมิติแล้ว ผลเฉลยจะยังอยู่ในปริภูมิการแปลงดังนั้นจึงต้องใช้การแปลงฟูเรียร์ผกผัน ซึ่งเป็นสมการที่ (3.2) แปลงกลับให้อยู่ในปริภูมิกายภาพ แต่การแปลงฟูเรียร์ผกผันต้องหาปริพันธ์ในเขต $-\infty$ ถึง ∞ ดังนั้นผู้จัดทำจึงใช้ระเบียบเกาส์ควอดราเจอร์ในการแก้ปัญหา โดยใช้โปรแกรม MATLAB2023b

4. ผลการดำเนินการวิจัย

ในบทนี้จะเริ่มจากการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมเพื่อที่จะมั่นใจได้ว่าโปรแกรมที่ใช้หาคำตอบจะมีความถูกต้องสมบูรณ์โดยจะตรวจสอบโดยนำผลที่โปรแกรมหาค่าได้ในกรณีต่างๆไปเปรียบเทียบกับแหล่งที่น่าเชื่อถือ เมื่อตรวจสอบแล้วว่าโปรแกรมมีความถูกต้องจึงจะศึกษาอิทธิพลของความหนาชั้นเคลือบและสัดส่วนแกรฟีนที่ผสมลงในวัสดุเชิงประกอบ โดยจะทำการศึกษาหน่วยแรงในแนวตั้งและหน่วยแรงเฉือนแนวระนาบบริเวณผิวรอยต่อของชั้นผิวเคลือบและชั้นฐานกึ่งปริภูมิสองมิติจากแรงภายนอกสองกรณีคือ หน่วยแรงในแนวตั้งสม่ำเสมอกระทำที่บนผิวเคลือบและ หน่วยแรงเฉือนสม่ำเสมอกระทำที่บนผิวเคลือบ และใช้คุณสมบัติของวัสดุสำหรับชั้นฐานและชั้นเคลือบตามตารางที่ 4.1

4.1 ตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม

เพื่อตรวจสอบว่าโปรแกรมที่สร้างขึ้นมีความถูกต้อง จะทำการตรวจสอบสองส่วน ส่วนแรกคือ ทดสอบการเข้าสู่ของคำตอบ ส่วนที่สองคือ ทดสอบความถูกต้องของโปรแกรมโดยเทียบผลลัพธ์กับแหล่งที่น่าเชื่อถือ โดย

ทดสอบสองกรณี คือ กรณีคุณสมบัติผิวเคลือบและชั้นกึ่งปริภูมิเท่ากัน และ กรณีคุณสมบัติผิวเคลือบและกึ่งปริภูมิไม่เท่ากัน

ตารางที่ 4.1 คุณสมบัติของวัสดุ

วัสดุ	$E(GPa)$	ν
แผ่นแกรไฟีน	1010	0.186
โพลีเมอร์	3.4	0.3
แมกนีเซียมอัลลอย	45	0.3

4.1.1 ทดสอบการลู่เข้าของคำตอบ

ในระเบียบวิธีการแปลงฟูเรียร์ผกผันจะมีการหาปริพันธ์ในเขต $-\infty$ ถึง ∞ ซึ่งไม่สามารถทำได้ในทางปฏิบัติ ดังนั้นจึงต้องกำหนดขอบเขต $-R$ ถึง R โดย R เป็นจำนวนจริงที่มากพอที่ทำให้คำตอบใกล้เคียงคำตอบที่แท้จริง และแบ่งช่วงย่อย $2N$ ช่วง โดยจำนวนช่วงย่อยจะต้องมีความละเอียดพอที่จะทำให้ผลลัพธ์มีค่าใกล้เคียงคำตอบที่แท้จริง โดยผู้จัดทำจะทดสอบโดยกำหนดความกว้างของแต่ละช่วงย่อย (R/N) และเพิ่มความกว้างเรื่อยๆเพื่อตรวจสอบว่าความกว้างของแต่ละช่วงย่อยที่มากที่สุดที่ไม่ทำให้คำตอบมีการเปลี่ยนแปลงว่ามีค่าเท่าไร จากการทดสอบได้ผลสรุปว่าสามารถใช้ความกว้างช่องได้มากที่สุด 200 หน่วยคำตอบจึงจะไม่มีการเปลี่ยนแปลงโดยผลลัพธ์แสดงดังตารางที่ 4.2

ตารางที่ 4.2 เปรียบเทียบค่า R/N ที่เหมาะสม

R/N	1000	500	250	200	100
จุดที่ 1	-0.8028	0.1467	0.0031	0.0027	0.0027
จุดที่ 2	-0.7413	-0.4970	-0.0050	-0.0050	-0.0050
จุดที่ 3	0.1627	0.0946	0.0092	0.0092	0.0092
จุดที่ 4	-0.0615	-0.0230	-0.0242	-0.0242	-0.0242
จุดที่ 5	-1.0248	-1.0185	-1.0185	-1.0185	-1.0185

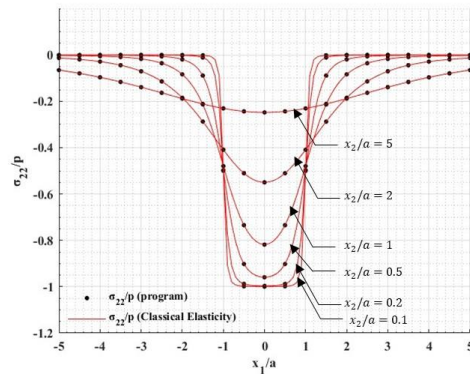
เมื่อได้ความกว้างของแต่ละช่วงย่อยที่เหมาะสมแล้วจึงทดสอบต่อไป โดยเพิ่มความกว้างขอบเขตการหาปริพันธ์ (R) ขึ้นเรื่อยๆ โดยใช้ความกว้างของแต่ละช่วงย่อยเท่าเดิม ($N=200$) จนผลลัพธ์ไม่มีการเปลี่ยนแปลง จากการทดสอบได้ผลสรุปว่าใช้ความกว้างขอบเขตการหาปริพันธ์ เท่ากับ 1,000,000 คำตอบจึงจะไม่มีการเปลี่ยนแปลง ดังตารางที่ 4.3

ตารางที่ 4.3 ตารางเปรียบเทียบค่า R ที่เหมาะสม

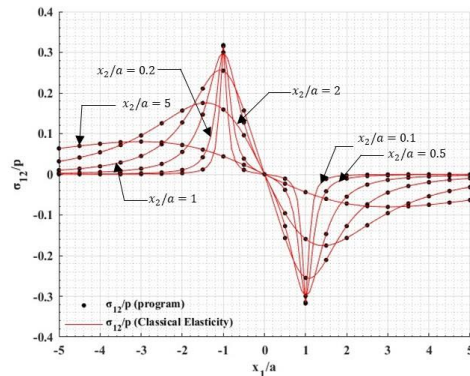
R	1000	10000	100000	1000000	2000000
จุดที่ 1	0.0027	0.0004	0.0000	0.0000	0.0000
จุดที่ 2	-0.0050	-0.0008	0.0001	0.0000	0.0000
จุดที่ 3	0.0092	0.0008	-0.0001	0.0000	0.0000
จุดที่ 4	-0.0242	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
จุดที่ 5	-1.0185	-0.9988	-1.0003	-1.0000	-1.0000

4.1.2 กรณีคุณสมบัติของชั้นผิวเคลือบเท่ากับชั้นฐานกึ่งปริภูมิสองมิติ

พิจารณากรณีกรณีคุณสมบัติของชั้นผิวเคลือบเท่ากับชั้นฐานกึ่งปริภูมิสองมิติที่มีหน่วยแรงในแนวตั้งสม่ำเสมอกระทำบนชั้นผิวเคลือบ $p(x) = p$ ในระยะจำกัด $2a$ โดยจะตรวจสอบหน่วยแรงในแนวตั้งและราบต่อหน่วยแรงในแนวตั้งสม่ำเสมอกระทำบนชั้นผิวเคลือบ σ_{22}/p , σ_{12}/q ที่ความลึกต่อความกว้างของหน่วยแรงที่กระทำที่ผิว x_2/a ที่ช่วงระยะแนวระนาบต่อความกว้างของหน่วยแรง x_1/a เท่ากับ $-5a$ ถึง $5a$ นำผลลัพธ์ที่ได้ไปเปรียบเทียบกับ ผลเฉลยของทฤษฎีสภาพยืดหยุ่นแบบคลาสสิก (Classical Elasticity) ได้ผลลัพธ์ดังรูปที่ 3.1 และรูปที่ 3.2 จะเห็นว่าผลลัพธ์ที่โปรแกรมได้มีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยของทฤษฎีสภาพยืดหยุ่นแบบคลาสสิก



รูปที่ 3.1 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงในแนวตั้งที่ความหนาต่างๆ



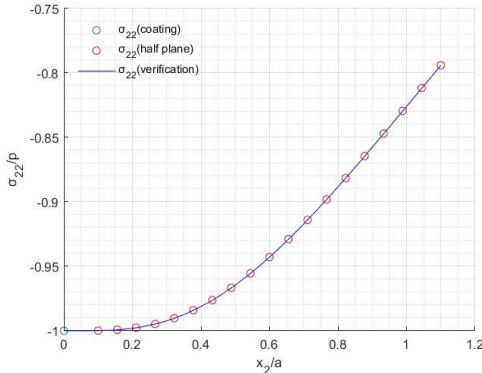
รูปที่ 3.2 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงเฉือนที่ความหนาต่างๆ

4.1.3 กรณีที่ชั้นผิวเคลือบมีคุณสมบัติไม่เท่ากับชั้นฐานกึ่งปริภูมิ

พิจารณากรณีกรณีคุณสมบัติของชั้นผิวเคลือบไม่เท่ากับชั้นฐานกึ่งปริภูมิสองมิติที่มีหน่วยแรงในแนวตั้งสม่ำเสมอกระทำบนชั้นผิวเคลือบ $p(x) = p$ ในระยะจำกัด $2a$ โดยจะตรวจสอบหน่วยแรงในแนวตั้งต่อหน่วยแรงในแนวตั้งสม่ำเสมอกระทำบนชั้นผิวเคลือบ σ_{22}/p ที่ความลึกต่อความกว้างของหน่วยแรงที่กระทำที่ผิว x_2/a โดยพิจารณาที่ตำแหน่ง $x_2 = 0$ โดยใช้คุณสมบัติต่างๆดังนี้ $\mu_c = 10$ GPa, $\nu_c = 0.3$, $\mu = 20$ GPa, $\nu_h = 0.3$, $l_{GPL} = 2.5\mu m$, $w_{GPL} = 1.5\mu m$, $t_{GPL} = 1.5nm$ โดยเมื่อนำผลลัพธ์ที่โปรแกรมที่ผู้จัดทำใช้ $\sigma_{22}(coating)$ $\sigma_{22}(half-plane)$ ซึ่งเป็นหน่วย

แรงที่เกิดขึ้นเคลือบและชั้นกึ่งปริภูมิสองมิติ ตามลำดับ เทียบกับผลลัพธ์ของโปรแกรมที่นำมาเปรียบเทียบกับ σ_{22} (verification) โดยใช้ค่าต่างๆที่กล่าวข้างต้นพบว่ามีความใกล้เคียงกันดังรูป 3.3

จากการทดสอบความถูกต้องของโปรแกรมทั้ง 2 กรณีโดยการนำผลลัพธ์ที่ได้ไปเปรียบเทียบกับแบบจำลองอื่นได้ผลลัพธ์ดังรูปที่ 3.1 - 3.3 จะเห็นว่าผลลัพธ์ที่โปรแกรมได้มีค่าใกล้เคียงกับแบบจำลองอื่นดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่าโปรแกรมมีความถูกต้องสามารถนำไปใช้ได้



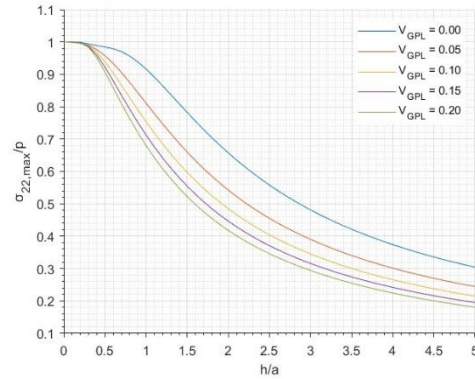
รูปที่ 3.3 กราฟหน่วยแรงในแนวตั้งกรณีที่ชั้นผิวเคลือบมีคุณสมบัติไม่เท่ากับชั้นกึ่งปริภูมิของความลึกต่างๆ

4.2 อิทธิพลของความหนาชั้นเคลือบ

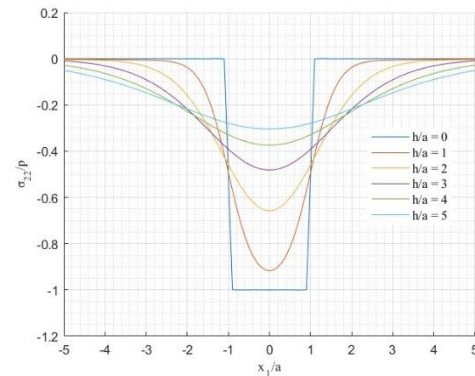
เพื่อศึกษาอิทธิพลของความหนาของชั้นผิวเคลือบที่ส่งผลต่อหน่วยแรงที่ชั้นบริเวณผิวรอยต่อของผิวเคลือบและชั้นฐานกึ่งปริภูมิสองมิติ ผู้จัดทำจะศึกษาโดยพิจารณาสองกรณี กรณีแรกคือมีหน่วยแรงในแนวตั้งสม่ำเสมอ $p(x) = p$ กระทำบนชั้นผิวเคลือบ กรณีที่สองมีหน่วยแรงเฉือนในแนวระนาบสม่ำเสมอ $q(x) = q$ กระทำบนชั้นผิวเคลือบ ในระยะจำกัด $2a$ และกำหนดให้ ระยะแนวตั้งที่ศึกษา x_2/a และระยะแนวระนาบที่ศึกษาคือ x_1/a และความหนาที่ศึกษาคือ h/a โดยจะศึกษาโดยกำหนดสัดส่วนแกรฟีนให้เป็นค่าคงที่ค่าหนึ่งแล้วศึกษาว่าความหนาของชั้นเคลือบส่งผลอย่างไรกับหน่วยแรงในแนวตั้งและแนวระนาบสูงสุดที่เกิดที่ผิวรอยต่อโดยกำหนดให้ $V_{GPL} = \{0, 0.05, 0.1, 0.15, 0.20\}$ และศึกษาโดยใช้ที่ความหนาในช่วง $h/a = (0, 5)$

จากการศึกษาพบว่า การเพิ่มความหนาชั้นเคลือบช่วยลดหน่วยแรงในแนวตั้งที่ผิวรอยต่อโดยหน่วยแรงในแนวตั้งจะมีหน่วยแรงสูงสุดที่ตำแหน่งกึ่งกลางดังรูปที่ 3.5 และพบว่าการใช้ความหนา h/a ในช่วง 0 ถึง 0.5 แทบไม่ช่วยในการลดหน่วยแรงในแนวตั้งที่ผิวรอยต่อเลยสังเกตได้จากรูปที่ 3.4

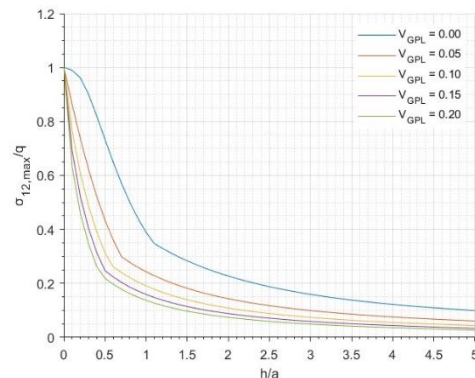
สำหรับหน่วยแรงเฉือนในแนวระนาบการเพิ่มความหนาส่งผลอย่างมากต่อการลดหน่วยแรงที่เกิดที่รอยต่อโดยสังเกตได้จากรูปที่ 3.6 และจากรูปจะเห็นว่ากราฟมีการเปลี่ยนความชันอย่างเห็นได้ชัดที่ความหนาค่าหนึ่ง ซึ่งจุดนั้นเกิดจากการเปลี่ยนตำแหน่งของหน่วยแรงเฉือนสูงสุดที่รอยต่อ โดยพบว่าในช่วงความหนาน้อยๆหน่วยแรงเฉือนสูงสุดจะอยู่ที่จุดกึ่งกลางของแรงที่กระทำแต่เมื่อความหนาเพิ่มขึ้นจนถึงจุดหนึ่งหน่วยแรงเฉือนจะเปลี่ยนตำแหน่งโดยเลื่อนออกจากจุดศูนย์กลางของแรงที่กระทำดังรูปที่ 3.7



รูปที่ 3.4 ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงในแนวตั้งและความหนาชั้นเคลือบที่สัดส่วนแกรฟีนต่างๆ



รูปที่ 3.5 หน่วยแรงในแนวตั้งบริเวณรอยต่อที่ความหนาชั้นเคลือบ $h/a = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$



รูปที่ 3.6 ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงเฉือนและความหนาชั้นเคลือบที่สัดส่วนแกรฟีนต่างๆ

4.3 อิทธิพลของสัดส่วนแกรฟีน

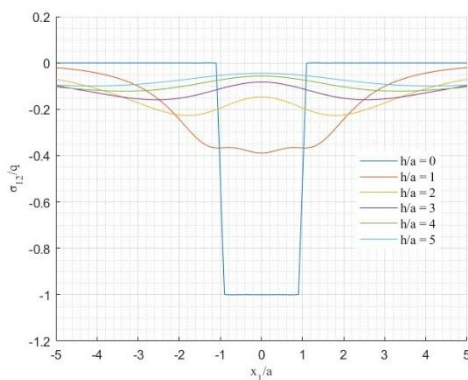
เพื่อศึกษาอิทธิพลของสัดส่วนแกรฟีนที่ส่งผลต่อการกระจายของหน่วยแรงที่บริเวณผิวรอยต่อ ผู้จัดทำจะศึกษาโดยพิจารณาสองกรณีกรณีแรกคือมีหน่วยแรงในแนวตั้งสม่ำเสมอ $p(x) = p$ กระทำบนชั้นผิวเคลือบ กรณีที่สองมีหน่วยแรงเฉือนในแนวระนาบสม่ำเสมอ $q(x) = q$ กระทำบนชั้น

ผิวเคลือบ ในระยะจำกัด $2a$ และกำหนดให้ ระยะแนวตั้งที่ศึกษา x_2/a และระยะแนวระนาบที่ศึกษาคือ x_1/a และความหนาที่ศึกษาคือ h/a โดยจะศึกษาโดยการกำหนดความหนาของชั้นเคลือบเป็นค่าคงที่ค่าหนึ่ง แล้วศึกษาว่าการเพิ่มสัดส่วนของแผ่นแกรฟีนส่งผลอย่างไรต่อหน่วยแรงในแนวตั้ง และแนวระนาบสูงสุดที่เกิดที่ผิวรอยต่อโดยกำหนดให้ $h/a = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ และศึกษาโดยใช้สัดส่วนแกรฟีนในช่วง $V_{GPL} = (0, 0.5)$

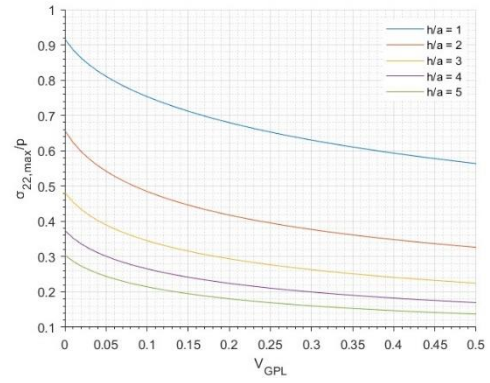
จากการศึกษาพบว่า การเพิ่มสัดส่วนแผ่นแกรฟีนช่วยลดหน่วยแรงในแนวตั้งได้ดังรูปที่ 3.8 และ 3.9 โดยเมื่อเพิ่มสัดส่วนแกรฟีนขึ้นเรื่อยๆ จะทำให้อัตราการลดลงของหน่วยแรงที่รอยต่อลดลงนั้นหมายความว่า การเพิ่มสัดส่วนแกรฟีนมาก ๆ อาจไม่ส่งผลดีเสมอไป แต่ต้องใส่ในปริมาณที่เหมาะสม และจากการเปรียบเทียบระหว่างรูปที่ 3.7 และ 3.8 จะเห็นว่าการเพิ่มสัดส่วนแผ่นแกรฟีนส่งผลอย่างมากต่อการลดของหน่วยแรงเฉือนที่รอยต่อเมื่อเทียบกับหน่วยแรงในแนวตั้ง

4.4 ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงความหนาชั้นเคลือบและสัดส่วนแกรฟีน

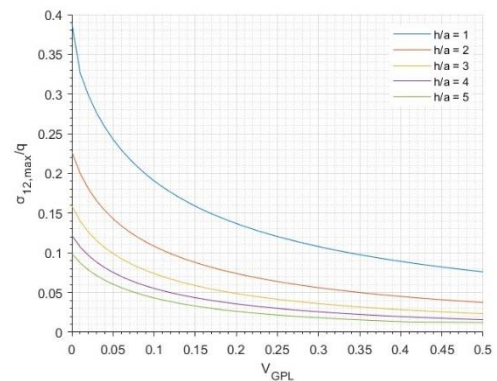
จากรูปที่ 3.4 ถึง 3.9 จะเห็นว่า การเพิ่มความหนาชั้นเคลือบหรือการเพิ่มสัดส่วนแกรฟีนเมื่อถึงจุดหนึ่งจะได้ผลลัพธ์ที่ช่วยลดหน่วยแรงที่แรงทำต่อฐานกึ่งปริภูมิสองมิติมากขึ้นในอัตราที่ลดลงไม่ใช่แนวโน้มที่เป็นกราฟเส้นตรง ดังนั้นการออกแบบความหนาชั้นเคลือบหรือสัดส่วนแผ่นแกรฟีนควรออกแบบให้มีความเหมาะสม โดยสามารถอ้างอิงตามกราฟที่ได้จากโปรแกรมนี้ เพื่อให้การออกแบบมีประสิทธิภาพสูงสุด โดยหากต้องการออกแบบความหนาและสัดส่วนแกรฟีนที่เหมาะสมสำหรับการรับหน่วยแรงในแนวตั้งสามารถใช้กราฟจากรูปที่ 3.4 และ 3.8 ในการออกแบบและใช้กราฟรูปที่ 3.6 และ 3.9 สำหรับการออกแบบเพื่อรับหน่วยแรงเฉือนในแนวราบ



รูปที่ 3.7 หน่วยแรงเฉือนในแนวราบบริเวณรอยต่อที่ความหนาชั้นเคลือบ $h/a = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$



รูปที่ 3.8 ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงในแนวตั้งและสัดส่วนแกรฟีนที่ความหนาต่างๆ



รูปที่ 3.9 ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงเฉือนและสัดส่วนแกรฟีนที่ความหนาต่างๆ

5. บทสรุป

จากการศึกษาวิจัยเรื่องการจำลองผลตอบสนองเชิงกลของชั้นยึดหยุ่นที่เคลือบด้วยวัสดุเชิงประกอบผสมแผ่นแกรฟีน หลังจากที่ได้จัดทำดำเนินการทดลองทางทฤษฎีแล้วทำให้ได้ข้อสรุปที่สำคัญได้ดังนี้

ผู้จัดทำพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สร้างจากจากสมการพื้นฐานของวัสดุยึดหยุ่นเชิงเส้น และวิเคราะห์หาผลเฉลยโดยใช้การแปลงฟูเรียร์ ประกอบกับการแก้สมการอนุพันธ์ลำดับสองตีกรี 1 และหาค่าคงที่โดยแก้ระบบสมการเชิงเส้น 6 ตัวแปร ทำให้สามารถศึกษาอิทธิพลของความหนาชั้นเคลือบ และสัดส่วนแกรฟีนที่ส่งผลต่อสนามยึดหยุ่นของวัตถุหลังเคลือบได้โดยแบบจำลองและโปรแกรมที่ผู้จัดทำสร้างสามารถหาหน่วยแรง และการกระจายตัวของชั้นเคลือบและชั้นฐานได้ทั้งแนวตั้งและแนวราบ และสามารถสร้างกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง หน่วยแรงที่เกิดจากความหนาชั้นเคลือบและสัดส่วนแกรฟีนต่างๆทำให้สามารถใช้เป็นข้อมูลเบื้องต้นในการ ออกแบบการทดลอง หรือการออกแบบชั้นเคลือบที่เหมาะสมได้

ผลของอิทธิพลความหนาชั้นเคลือบมีผลลัพธ์ดังนี้ ผลลัพธ์ที่หนึ่งคือ การเพิ่มความหนาชั้นเคลือบช่วยลดหน่วยแรงสูงสุดที่เกิดที่ชั้นฐานแต่เมื่อความหนามากขึ้นการลดของหน่วยแรงจะมีอัตราที่ลดลง ผลลัพธ์ที่สองคือ การเพิ่มความหนาชั้นเคลือบส่งผลอย่างมากต่อการลดหน่วยแรงเฉือน โดยสังเกตจากกราฟ หน่วยแรงเฉือน - ความหนาชั้นเคลือบ เทียบกับ หน่วย

แรงในแนวตั้ง – ความหนาชั้นเคลือบ โดยพิจารณาที่ความหนาเดียวกัน ผลลัพธ์ที่สามคือ การเพิ่มความหนาของชั้นเคลือบจนถึงจุดหนึ่งจะทำให้หน่วยแรงเฉือนสูงสุดโดยเลื่อนออกจากจุดศูนย์กลางแรงที่กระทำ และผลลัพธ์สุดท้ายคือ การใช้ความหนา $h/a < 0.5$ แทบจะไม่ส่งผลกระทบต่อการลดของหน่วยแรงในแนวตั้ง ถึงแม้ว่าจะเพิ่มสัดส่วนแกรฟีนปริมาณมากก็ตาม

ผลของอิทธิพลสัดส่วนแกรฟีนมีผลลัพธ์ดังนี้ ผลลัพธ์ที่หนึ่งคือ การเพิ่มสัดส่วนแผ่นแกรฟีนส่งผลให้ช่วยลดหน่วยแรงสูงสุดที่เกิดที่ชั้นฐานแต่เมื่อเพิ่มสัดส่วนแผ่นแกรฟีนมากขึ้นการลดของหน่วยแรงจะมีอัตราที่ลดลง ผลลัพธ์ที่สองคือ การเพิ่มสัดส่วนแผ่นแกรฟีนทำให้การกระจายของหน่วยแรงดีขึ้น ซึ่งส่งผลอย่างมากต่อการลดหน่วยแรงที่ชั้นฐานโดยจากแบบจำลองพบว่า การเพิ่มแกรฟีน 10% ช่วยลดหน่วยแรงที่ชั้นฐานประมาณ 20% เทียบกับการไม่ผสมแผ่นแกรฟีน และผลลัพธ์สุดท้ายคือ การเพิ่มสัดส่วนแผ่นแกรฟีนจะช่วยลดความหนาชั้นเคลือบที่หน่วยแรงใดๆ ได้ แต่อัตราการลดลงของความหนาจะน้อยลงเมื่อเพิ่มสัดส่วนแกรฟีนขึ้นเรื่อยๆ

เมื่อผู้จัดทำพิจารณาถึงประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจะพบว่า วิศวกรที่ต้องทำการออกแบบและนักธุรกิจที่จะตัดสินใจลงทุนในวัสดุเชิงประกอบผสมแกรฟีนโดยการออกแบบสามารถที่จะใช้โปรแกรมที่ผู้จัดทำสร้างขึ้นในการพิจารณาหาความสัมพันธ์ระหว่างความหนา สัดส่วนแผ่นแกรฟีน กับความสามารถในการลดหน่วยแรงที่แรงทำต่อฐานถึงปริภูมิสองมิติเพื่อหาจุดที่ใช้ทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัดได้ดีที่สุด อีกทั้งนักวิจัยสามารถนำองค์ความรู้จากโครงการนี้ไปพัฒนาต่อยอดเพิ่มความซับซ้อนของปัญหาให้สอดคล้องกับความเป็นจริงได้มากขึ้นในอนาคต

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบพระคุณ ศ.ดร.จรรุญ รุ่งอมรรัตน์ อาจารย์ที่ปรึกษาอย่างสุดซึ้งสำหรับคำแนะนำ การสนับสนุน และข้อเสนอแนะอันล้ำค่าตลอดกระบวนการวิจัยทั้งหมด ความเชี่ยวชาญและการให้คำปรึกษาของท่านมีส่วนสำคัญในการศึกษาโครงการนี้

ขอขอบคุณคณะกรรมการวิทยานิพนธ์ทุกท่าน ศ.ดร.อัครวัชร เล่านาวี และ ศ.ดร.ทศพล ปิ่นแก้ว ที่ได้ให้ข้อเสนอแนะและข้อคิดเห็นอันทรงคุณค่าซึ่งมีส่วนช่วยอย่างมากในการปรับปรุงงานนี้

ขอขอบคุณเพื่อนร่วมงานสำหรับกำลังใจ การสนับสนุน และการพูดคุยเรื่องที่น่าสนใจระหว่างศึกษาวิจัยครั้งนี้

สุดท้ายนี้ ขอแสดงความขอบคุณอย่างสุดซึ้งต่อครอบครัวและคนรัก ความรัก ความเข้าใจ และกำลังใจอันแน่วแน่ของพวกเขาเป็นรากฐานของความอดทนและความสำเร็จครั้งนี้

เอกสารอ้างอิง

[1] Hussain, A. K., Sudin, I., Basheer, U. M., & Yusop, M. Z. M. (2019). A review on graphene-based polymer composite coatings for the corrosion protection of metals., 37(4), 343–363. <https://doi.org/10.1515/correv-2018-0097>

[2] Duan, Z. (2019). Application of graphene in metal corrosion protection. IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 493 012020

[3] Mu, J., Gao, F., Cui, G., Wang, S., Tang, S., & Li, Z. (2021). A comprehensive review of anticorrosive graphene-composite coatings., 157, 106321. <https://doi.org/10.1016/j.porgcoat.2021.106321>

[4] Jena, G., & Philip, J. (2022). A review on recent advances in graphene oxide-based composite coatings for anticorrosion applications., 173, 107208. <https://doi.org/10.1016/j.porgcoat.2022.107208>

[5] Zhaoa, S., Zhaob, Z., Yangc, Z., Ked, L. L., Kitipornchaia, S., & Yangb, J. (2020). Functionally graded graphene reinforced composite structures: A review., 210, 110339. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.110339>

[6] Sneddon, I. N. (1951). Fourier transforms. McGraw-Hill.

6. ภาคผนวก

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= 2\mu_c C_1 i \zeta | \zeta | \\
 A_{12} &= 2\mu_c C_2 i \left(-\frac{1-\kappa_c}{2} \right) \zeta \\
 A_{13} &= 2\mu_c C_3 i \zeta | \zeta | \\
 A_{14} &= 2\mu_c C_4 i \left(-\frac{\kappa_c-1}{2} \right) \zeta \\
 A_{15} &= 0 \\
 A_{16} &= 0 \\
 A_{21} &= 2\mu_c C_1 \zeta^2 \\
 A_{22} &= 2\mu_c C_2 \left(\frac{\kappa_c+1}{2} \right) | \zeta | \\
 A_{23} &= -2\mu_c C_3 \zeta^2 \\
 A_{24} &= 2\mu_c C_4 \left(\frac{\kappa_c+1}{2} \right) | \zeta | \\
 A_{25} &= 0 \\
 A_{26} &= 0 \\
 A_{31} &= C_1 | \zeta | e^{|\zeta| h} \\
 A_{32} &= C_2 (h | \zeta | + \kappa_c) e^{|\zeta| h} \\
 A_{33} &= C_3 | \zeta | e^{-|\zeta| h} \\
 A_{34} &= C_4 (h | \zeta | - \kappa_c) e^{-|\zeta| h} \\
 A_{35} &= -C_5 | \zeta | \\
 A_{36} &= \kappa C_6 \\
 A_{41} &= C_1 i \zeta e^{|\zeta| h} \\
 A_{42} &= C_2 h i \zeta e^{|\zeta| h} \\
 A_{43} &= -C_3 i \zeta e^{-|\zeta| h} \\
 A_{44} &= -C_4 h i \zeta e^{-|\zeta| h} \\
 A_{45} &= C_5 i \zeta \\
 A_{46} &= 0 \\
 A_{51} &= 2\mu_c C_1 i \zeta | \zeta | e^{|\zeta| h} \\
 A_{52} &= 2\mu_c C_2 i (h | \zeta | - \frac{1-\kappa_c}{2}) \zeta e^{|\zeta| h} \\
 A_{53} &= 2\mu_c C_3 i \zeta | \zeta | e^{-|\zeta| h} \\
 A_{54} &= 2\mu_c C_4 i (h | \zeta | - \frac{\kappa_c-1}{2}) \zeta e^{-|\zeta| h} \\
 A_{55} &= -2\mu_c C_5 i \zeta | \zeta |
 \end{aligned}$$

$$A_{56} = -2\mu C_6 i \left(-\frac{\kappa-1}{2}\right) \zeta$$

$$A_{61} = 2\mu_c C_7 \zeta^2 e^{|\zeta|h}$$

$$A_{62} = 2\mu_c C_2 \left(h|\zeta| + \frac{1+\kappa_c}{2}\right) |\zeta| e^{|\zeta|h}$$

$$A_{63} = -2\mu_c C_3 \zeta^2 e^{-|\zeta|h}$$

$$A_{64} = 2\mu_c C_4 \left(\frac{\kappa_c+1}{2} - h|\zeta|\right) |\zeta| e^{-|\zeta|h}$$

$$A_{65} = 2\mu C_5 \zeta^2$$

$$A_{66} = -2\mu C_6 \left(\frac{\kappa+1}{2}\right) |\zeta|$$

$$b_1 = -\int_{-\infty}^{\infty} t_{22} e^{i\zeta x_1} dx_1$$

$$b_2 = -\int_{-\infty}^{\infty} t_{12} e^{i\zeta x_1} dx_1$$

$$b_3 = 0$$

$$b_4 = 0$$

$$b_5 = 0$$

$$b_6 = 0$$